شبیه‌سازی گردش زمین و ماه به دور یکدیگر

غلامحسین رستگارنسب، دبیر پژوهش
حسن سرپرست، دبیر فیزیک
محمدرضا طیبی، دانش‌آموز دبیرستان استعدادهای درخشان شهید بهشتی رودهن

چکیده

اینکه ماه به دور زمین می‌گردد برای همه روشن است. در این مقاله سعی شده است به کمک مدل‌سازی نشان داده شود، همان‌طور که ماه به دور زمین می‌گردد، زمین نیز به دور ماه می‌گردد و نسبت شعاع گردش هرکدام به دور دیگری نیز به عکس جرم آن‌ها بستگی دارد. به‌گونه‌ای که شعاع چرخش ماه به دور زمین معادل ۸۱ برابر شعاع چرخش زمین به دور ماه است چرا که ماه جرمی برابر ۱/۸۱ جرم زمین دارد.

کلیدواژه‌ها: زمین، ماه، جرم، مرکز جرم

مقدمه

میلیاردها سال است که ماه، به دور زمین می‌گردد و هزاران سال است که انسان گردش مداوم ماه به دور زمین را مشاهده می‌کند. چون انسان بر روی زمین زندگی می‌کند، نمی‌تواند دریابد که آیا همان‌طور که ماه به دور زمین می‌گردد، زمین نیز به دور ماه می‌گردد. بیشتر کتاب‌هایی که گردش زمین به دور ماه را بررسی کرده‌اند براساس محاسبه‌ها و رصدهای نجومی به بررسی این پدیده پرداخته و نسبت شعاع‌های چرخش آن‌ها را نیز بر همین اساس به دست آورده‌اند. [۱]

در این مقاله سعی شده است به کمک معادله‌های ساده مکانیک و بدون درگیر شدن با محاسبات پیچیده مکانیک سماوی و با انجام چند آزمایش ساده (و با تأکید بر قابل فهم بودن برای عامه مردم) این پدیده طبیعی شبیه‌سازی شود، در مورد گردش زمین و ماه به دور همدیگر و نیز نسبت شعاع‌های چرخش آن‌ها به دور یکدیگر نتایجی به دست آید.

شرح مسئله

از چرخش دو جسم صلب منزوی به دور همدیگر نتیجه‌گیری می‌شود که شعاع چرخش آن‌ها به دور یکدیگر به محل مرکز جرم آن‌ها بستگی دارد و بسته به محل قرارگرفتن مرکز جرم آن‌ها شعاع چرخش تغییر می‌کند. [۲]

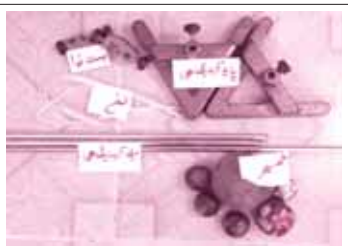
در مورد منظومهٔ ماه ـ زمین نیز مرکز ماه به دور مرکز جرم منظومهٔ ماه ـ زمین در حال گردش است و به همین ترتیب مرکز زمین نیز به دور مرکز جرم منظومهٔ ماه ـ زمین می‌گردد.

تعیین نسبت چرخش زمین و ماه به دور هم

به منظور تعیین نسبت واقعی گردش زمین و ماه به دور مرکز جرمشان، لازم است تا با طراحی و انجام چند آزمایش، قدم به قدم به نسبت واقعی بین زمین و ماه نزدیک شویم و نتایج حاصل را با هم مقایسه کنیم تا سرانجام به نتیجه موردنظر دست یابیم. برای انجام این آزمایش‌ها به وسایل و مواد زیر نیاز خواهیم داشت.

وسایل مورد آزمایش

خمیر بازی ـ پایه آزمایشگاهی (۲عدد) ـ میله آزمایشگاهی (٤ عدد) ـ بست نوا (۲ عدد) ـ نخ ـ رنگ ـ یک توپ پلاستیکی فوتبال ـ شن‌ریزه ـ گچ و سیمان



شکل ۱. وسایل موردنیاز در کنار هم

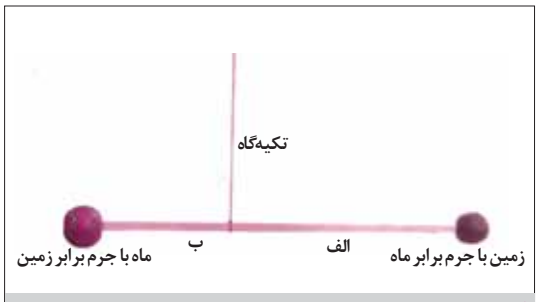
روش آزمایش

ابتـدا دو پایـه آزمایشـگاهی را در فاصلـه یـک متـری قـرار دادیـم. سـپس دو میلـه ۵۰ سـانتی‌متری را به‌طـور عمـود بـر روی دو پایـه آزمایشـگاه قـرار می‌دهیـم و آن‌هـا را در جـای خـود محکـم می‌کنیـم. دو بسـت نـوا را در بـالای میله‌هـای عمـودی و در انتهـای میله‌هـا قـرار می‌دهیـم و یـک میلـه یـک متـری را مـوازی سـطح زمیـن یـا عمـود بـر دو میلـه عمـودی بـه بسـت نـوا وصـل می‌کنیـم. بـه ایـن ترتیـب یـک قـاب مسـتطیلی شـکل بـه وجـود می‌آیـد (شـکل شـماره ۲). سـپس بـا خمیرهـای بـازی بـه انـدازه موردنیـاز در هـر آزمایش مـاه و زمیـن می‌سـازیم و آن‌هـا را رنـگ می‌کنیـم. زمیـن و مـاه را بـر دو سـر یـک میلـه ۵۰ سـانتی‌متری قـرار می‌دهیـم و مجموعـه را بـه نخـی متصـل بـه وسـط میلـه یـک متـری آویـزان می‌کنیـم. بـرای آزمایش‌هـای هـر مرحلـه از میـزان خمیـر موردنیـاز و جابه‌جایـی مرکـز جـرم بـه توسـط حرکـت نـخ اسـتفاده می‌کنیـم. (شـکل شـماره ۲)

شکل ۲. قاب سوار شده برای آزمایش

آزمایـش مرحلـه اول: شبیه‌سـازی چرخـش مـاه و زمیـن بـه دور هـم بـا فـرض برابـری جرم‌هـا

جـرم مـاه و زمیـن را برابـر هـم فـرض می‌کنیـم. سـپس یـک میلـه از مرکـز زمیـن بـه مرکـز مـاه وصـل می‌کنیـم. یـک تکیـه‌گاه را بیـن کـره زمیـن و کـره مـاه (همـان نخـی کـه بـه میلـه وصـل می‌شـود) قـرار می‌دهیـم. تکیـه‌گاه را جابه‌جـا می‌کنیـم تـا تعـادل بیـن دو کـره برقـرار شـود. همان‌طـور کـه در شـکل ۳ دیـده می‌شـود، در ایـن حالـت کـه جـرم کره‌هـا (جـرم زمیـن و مـاه) برابـر در نظـر گرفتـه شـده، تکیـه‌گاه در مرکـز میلـه قـرار می‌گیـرد. در شـکل ۱ فاصلـه بیـن تکیـه‌گاه و مرکـز زمیـن را بـا الـف و فاصلـه بیـن تکیـه‌گاه و مرکـز مـاه را با ب نشـان می‌دهیـم. در اینجـا، الـف: طـول بـازوی مرکـز زمیـن تـا تکیـه‌گاه و ب: طـول بـازوی مرکـز مـاه تـا تکیـه‌گاه نامیـده می‌شـود. حـال اگـر قـرار باشـد کـه ایـن دو کـره بـه دور هـم بگردنـد، بـه دور تکیـه‌گاه می‌گردنـد و چـون طـول بـازو در هـر دو کـره تـا تکیـه‌گاه برابـر اسـت، بنابرایـن: شـعاع چرخـش مـاه بـه دور زمیـن، درسـت برابـر شـعاع چرخـش زمیـن بـه دور ماه خواهـد بـود. یعنـی مـاه و زمیـن بـه یـک نسـبت بـه دور هـم می‌گردنـد. (شـکل شـماره ۳)



شکل ۳. در سمت چپ این شکل، ماه فرضی با جرم برابر زمین قرار دارد و در راست شکل، زمین با همین ویژگی دیده می‌شود و به خاطر برابری جرم‌ها، شعاع چرخش آن‌ها به دور هم با هم برابر است.

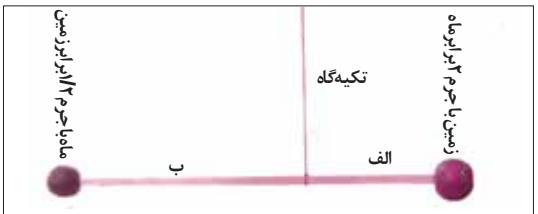
همان‌طـور کـه در شـکل دیـده می‌شـود، جـرم مـاه و زمیـن برابـر در نظـر گرفتـه شـده اسـت و تکیـه‌گاه کـه نـخ اسـت تقریبـاً در وسـط میلـه قـرار دارد. پـس می‌تـوان نوشـت (رابطـهٔ گشـتاورها): [۳]

$$m_1 \times d_1 = m_2 \times d_2 \quad (1)$$

در رابطـه ۱، m_1 جـرم زمیـن و الـف یا d_1 فاصلـه مرکز جرم زمیـن تـا تکیـه‌گاه اسـت همچنیـن m_2 جـرم مـاه و ب یـا d_2 فاصلـه مرکـز جـرم مـاه تـا تکیـه‌گاه اسـت. چـون جرم‌هـای مـاه و زمیـن در دو طـرف برابـر در نظـر گرفتـه شـده اسـت، (یعنـی $m_1=m_2=m$) بنابرایـن بـا حـذف جرم‌هـای یکسـان از دو طـرف معادلـه (کـه بـه شـکل $m\times d_1=m\times d_2$ تبدیـل شـده اسـت) ، فاصلـه مرکـز جرم‌هـا نیـز از تکیـه‌گاه برابـر شـده و تکیـه‌گاه در وسـط قـرار می‌گیـرد و در نتیجـه $d_1=d_2$ می‌شـود.

آزمایـش مرحلـهٔ دوم: شبیه‌سـازی چرخـش مـاه و زمیـن بـه دور هـم بـا فـرض بزرگ‌تـر بـودن جـرم زمیـن

در ایـن حالـت جـرم زمیـن را دو برابـر جـرم مـاه فـرض می‌کنیـم. آنـگاه بـرای اینکـه تـوازن بیـن کـره زمیـن و مـاه برقـرار شـود بایسـتی تکیـه‌گاه را مطابق شـکل ٤ بـر روی محور اتصـال، بـه سـمت کـره زمیـن جابه‌جـا و بـه آن نزدیک‌تـر کنیـم. بـا ایـن فـرض، همان‌طـور کـه در شـکل ٤ دیـده می‌شـود، طـول بـازوی مـاه دو برابـر طـول بـازوی زمیـن اسـت. حـال اگـر قـرار باشـد که ایـن دو جـرم بـه دور یکدیگـر بگردند: مـاه بـا طـول بـازوی ب بـه دور (مرکـز جـرم مـاه و زمیـن) می‌گـردد و زمیـن نیـز بـا طـول بـازوی الـف بـه دور (مرکـز جـرم زمیـن و مـاه) می‌گـردد. در اینجـا چـون طـول بـازوی مـاه بیشـتر اسـت، حرکـت مـاه بـه دور زمیـن محسـوس‌تر اسـت. (شـکل شـمارهٔ ٤)



شکل ٤. در این شکل ماه با جرم نصف زمین در سمت چپ قرار دارد و زمین با جرم دو برابر ماه درسمت راست قرار دارد و به همین دلیل برای برقراری تعادل، تکیه‌گاه به سمت زمین متمایل شده است.

همان‌طور که در شکل شماره ٤ دیده می‌شود، جرم زمین دو برابر جرم ماه در نظر گرفته شده است و تکیه‌گاه که نخ است به سمت زمین جابه‌جا می‌شود. رابطه شماره ١ همچنان برقرار است:

$$m_1 \times d_1 = m_2 \times d_2 \qquad (1)$$

با توجه به اینکه جرم زمین در این حالت دو برابر جرم ماه درنظر گرفته شده است ($m_1=2m_2$) رابطه شماره ١ به رابطه زیر تبدیل می‌شود:

$$2m_2 \times d_1 = m_2 \times d_2 \qquad (2)$$

از رابطه بالا این چنین به‌دست می‌آید که:

$$d_2 = 2d_1 \qquad (3)$$

همان‌طور که در رابطه شماره ٣ دیده می‌شود، وقتی جرم زمین دو برابر می‌شود، برای برقراری شرط تساوی دو طرف معادله، بایستی فاصله ماه تا تکیه‌گاه نیز دو برابر شود یا به عبارتی، تکیه‌گاه به سمت زمین جابه‌جا شده و بنا به محاسبه اندازه فاصله مرکز زمین تا تکیه‌گاه نصف فاصله مرکز ماه تا تکیه‌گاه خواهد بود.

آزمایش مرحلهٔ سوم: شبیه‌سازی چرخش ماه و زمین به دور هم با فرض نسبت واقعی جرم‌ها و فاصله‌ها (یا پدیده‌ای که به‌طور واقعی در طبیعت وجود دارد.)

با مقایسهٔ نسبت جرم زمین و ماه می‌فهمیم که:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{5.98\times10^{24}}{7.36\times10^{22}} = 81$$

جرم زمین (m_1) حدود ٨١ برابر جرم ماه است. با قرار دادن این جرم‌ها در رابطه شماره ١ می‌توان نوشت.

$$81m_2 \times d_1 = m_2 \times d_2 \qquad (4)$$

از رابطهٔ بالا می‌توان چنین نتیجه گرفت که:

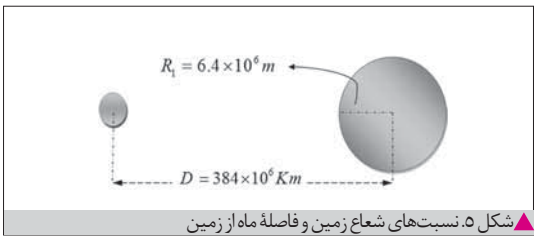
$$d_2 = 81d_1 \qquad (5)$$

یعنی در حالتی که مقدار واقعی جرم زمین در نظر گرفته می‌شود، فاصلهٔ مرکز جرم ماه از تکیه‌گاه (d_2) باید به نسبت (حدود) ٨١ برابر از فاصلهٔ مرکز جرم زمین تا تکیه‌گاه (d_1) دورتر باشد.

از طرفی نسبت شعاع زمین ($R_1 = 6.4\times10^6$ m) به فاصلهٔ متوسط ماه از زمین ($D = 384\times10^6$ Km) نشان می‌دهد که:

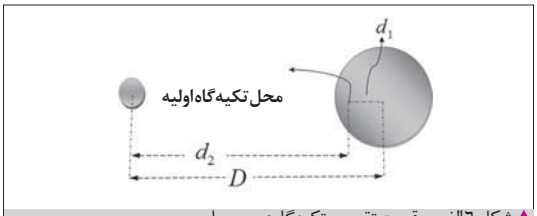
$$\frac{D}{R_1} = \frac{384\times10^6\,m}{6.4\times10^6\,m} = 60 \langle \frac{d_2}{d_1} = 81 \qquad (6)$$

یعنی تکیه‌گاهی که قرار است مرکز جرم‌های زمین و ماه به دور آن بگردند، می‌بایست نقطه‌ای داخل زمین در نظر گرفته شود.

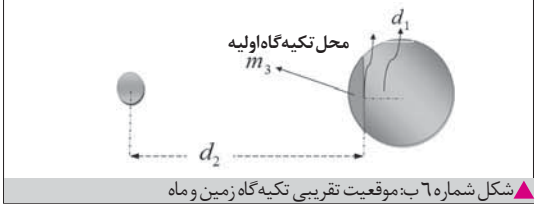


شکل ٥. نسبت‌های شعاع زمین و فاصلهٔ ماه از زمین

برای محاسبهٔ تقریبی تکیه‌گاه از مرکز زمین، با توجه به شکل‌های زیر:



شکل ٦ الف: موقعیت تقریبی تکیه‌گاه زمین و ماه



شکل شماره ٦ ب: موقعیت تقریبی تکیه‌گاه زمین و ماه

بین فاصلهٔ مرکز جرم زمین از تکیه‌گاه (d_1)، فاصلهٔ مرکز جرم ماه از تکیه‌گاه (d_2) و فاصله زمین از ماه (D)، رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$d_1 + d_2 = D \qquad (7)$$

اما شکل شمارهٔ ٦ ب نشان می‌دهد که در این وضعیت، بخشی از جرم زمین در سمت چپ تکیه‌گاه (سمت ماه) قرار می‌گیرد و در واقع این بخش از جرم زمین نیز باید به نوعی خود را در مرکز جرم ماه ظاهر سازد و رابطهٔ شماره ١ تغییر کرده و به‌صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$(m_1 - m_3)\times d_1 = m_2 \times d_2 + m_3 \times d_3 \qquad (8)$$

در رابطهٔ ٨ مقدار m_3 جرم آن قسمتی از زمین است که در سمت چپ تکیه‌گاه قرار گرفته و d_3 نیز فاصله مرکز جرم m_3 از تکیه‌گاه است و حل چنین معادله‌ای پیچیده است.

اما با توجه به اینکه $d_2=D-d_1$ (شکل شماره ٦) و قراردادن آن در رابطه ٥ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} &d_2 = 81d_1 \\ &D - d_1 = 81d_1 \\ &82d_1 = D \end{aligned} \qquad (5)$$

$$d_1 = \frac{D}{82} = \frac{384\times10^6\,m}{82} = 4.7\times10^6\,m \qquad (9)$$

مقدار به‌دست آمده یک مقدار تقریبی است و اشکال معادله بالا آن است که بخشی از جرم زمین که سمت چپ زمین قرار می‌گیرد (جرم m_3) در معادله در نظر گرفته نشده است و همچنین مرکز جرم زمین (جدید بدون m_3) نیز به مقدار جزئی به سمت راست حرکت خواهد کرد و فاصلهٔ مرکز جرم زمین (جدید بدون m_3) از تکیه‌گاه اندکی افزایش می‌یابد.

در طراحی مدل جدید سعی شد تا بدون حل معادلهٔ شماره ۸ و با تقریب نسبتاً خوبی از مجموعه زمین و ماه و فاصله‌ها، نتایج حاصل بر اساس مدل‌سازی، بر واقعیت‌ها منطبق شود و نتیجه‌نهایی به‌دست آید. بر این اساس ابتدا یک توپ فوتبال پلاستیکی به‌عنوان مدل زمین، انتخاب و با ایجاد سوراخی در توپ، درون آن از شن و ماسه پر شد و مقادیر زیر به ترتیب برای جرم و شعاع توپ (مدل زمین) به‌دست آمد:

$$m'_1 = ۳.۷۰۰Kg \qquad (۱۰)$$

$$R'_1 = ۸.۵\times۱۰^{-۱}m \qquad (۱۱)$$

با توجه به ابعاد مدل می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{فاصلهٔ مرکز توپ از تکیه‌گاه}}{\text{فاصلهٔ مرکز زمین از تکیه‌گاه}} = \frac{\text{شعاع توپ}}{\text{شعاع زمین}}$$

از رابطه بالا می‌توان نتیجهٔ زیر را به دست آورد:

$$\text{فاصلهٔ مرکز توپ از تکیه‌گاه} = \text{فاصلهٔ مرکز زمین از تکیه‌گاه} \times \frac{\text{شعاع توپ}}{\text{شعاع زمین}}$$

و با قرار دادن مقادیر جدید می‌توان فاصلهٔ مرکز مدل زمین (توپ) از تکیه‌گاه (d'_1) را به شکل زیر تعیین کرد:

$$\text{فاصلهٔ مرکز توپ از تکیه‌گاه} = \frac{۸.۵\times۱۰^{-۲}m}{۶.۴\times۱۰^{۶}m}\times۴.۷\times۱۰^{۶}m = ۶.۲\times۱۰^{-۲}m \qquad (۱۲)$$

با توجه به مدل، فاصله مرکز مدل ماه از تکیه‌گاه (d'_2) برابر خواهد شد با:

$$d'_2 = ۸۱d'_1 = ۸۱\times۶.۲cm = ۵۰۲.۲cm$$

یعنی طول میله‌ای که زمین و ماه را به هم متصل می‌کند باید حدود ۵ متر انتخاب شود که کارکردن با آن بسیار مشکل است. با کمی تغییر در نحوه نوشتن رابطهٔ شماره ۱ می‌فهمیم می‌توان با انتخاب جرم بزرگ‌تر برای ماه، فاصله را به همان نسبت کوچک‌تر کرد زیرا با توجه به رابطهٔ ۱ می‌توان نوشت:

$$m'_1\times d'_1 = ۸m'_2\times\frac{d'_2}{۸} \qquad (۱۳)$$

یعنی می‌توان با ۸ برابر کردن جرم ماه در عوض فاصله ماه از تکیه‌گاه را به نسبت $\frac{۱}{۸}$ برابر انتخاب کرد و با این شرایط فاصله مرکز مدل ماه از تکیه‌گاه (d'_2) برابر خواهد شد با:

$$d'_2 = \frac{۸۱}{۸}\times d'_1 = \frac{۸۱}{۸}\times۶.۲cm = ۶۳cm \qquad (۱۴)$$

یعنی در این وضعیت می‌توان به جای انتخاب میله ۵ متری یک میله ۶۳ سانتی‌متری را برای اتصال مدل زمین و ماه به کار برد. و به همین ترتیب برای جرم مدل ماه (m'_2)، نیز با توجه به جرم مدل زمین (m'_1)، جرم ماه (m_2) و جرم زمین (m_1)، رابطهٔ زیر را نوشت:

$$\frac{\text{جرم مدل زمین}}{\text{جرم زمین}} = \frac{\text{جرم مدل ماه}}{\text{جرم ماه}}$$

یعنی معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{m'_1}{m_1} = \frac{m'_2}{m_2}$$

و با قرار دادن مقادیر به‌دست می‌آوریم:

$$\frac{۳.۷۰۰Kg}{۵۹۸\times۱۰^{۲۲}Kg} = \frac{m'_2}{۷.۳۶\times۱۰^{۲۲}Kg}$$

از حل معادله بالا مقدار جرم مدل ماه به‌دست می‌آید که برابر است با:

$$m'_2 = ۰.۰۴۶Kg$$

و بنابراین جرمی که برای ساخت مدل نیاز داریم برابر است با:

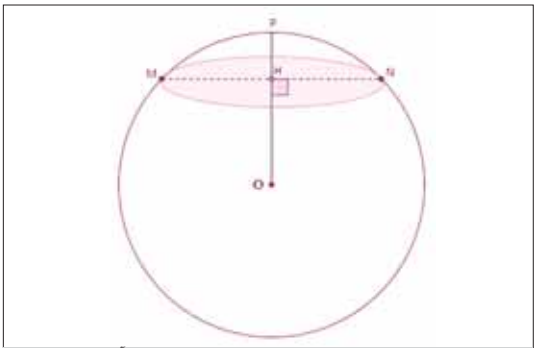
$$۸m'_2 = ۸\times۰.۰۴۶Kg = ۰.۳۶۴Kg \qquad (۱۵)$$

شکل زیر نمونه ساخته شده این مدل را با مقادیر رابطه‌های ۱۰ و ۱۱ و ۱۴ و ۱۵ نمایش می‌دهد.

شکل ۷. مدل زمین و ماه با رعایت نسبت‌های خاص

از آنجا که برش عرضی مقطع کره از یک سطح دایره‌ای است و مرکز جرم دایره (یا صفحهٔ دایره‌ای) نیز (در صورتی‌که کره یکنواخت باشد) همان مرکز

دایره است، تکیه‌گاه می‌بایست نقطه‌ای روی خط واصل مرکزهای دو جرم زمین و ماه باشد.
(مطابق شکل زیر در نقطهٔ H) [٤]



▲شکل ۸. برش عرضی یک کره و نمایش سطح مقطع دایره‌ای آن

می‌توان با جابه‌جا کردن تکیه‌گاه (گوه چوبی در شکل شماره ۷) وضعیتی ایجاد کرد که مجموعهٔ مدل در حالت تعادل قرار گیرد. با اندکی حوصله و دقت می‌توان این نقطهٔ خاص را به‌دست آورد. هرچند مطابق شکل شماره ۷ مجموعه بر روی تیغهٔ گوه چوبی که یک خط راست است قرار می‌گیرد اما به دلیل تقارنی که در شکل شماره ۸ مشخص است برش عرضی مقطع دایره‌ای حاصل از این تیغه، خط واصل مرکز جرم‌ها را فقط در یک نقطه (مانند H در شکل شماره ۸) قطع خواهد کرد.

با قرار گرفتن مجموعه در وضعیت تعادل و اندازه‌گیری فاصلهٔ محل تکیه‌گاه توپ تا سطح توپ (فاصلهٔ PH در شکل شماره ۸) نشان می‌دهد که این مقدار برابر است با:

$$PH = ۲.۱cm \qquad (۱۶)$$

با توجه به تشابه مدل ساخته شده با حالت واقعی می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{شعاع توپ}}{\text{شعاع زمین}} = \frac{\text{فاصله تکیه‌گاه از سطح توپ}}{\text{فاصله تکیه‌گاه از سطح زمین}}$$

با قرار دادن مقادیر در معادلهٔ بالا می‌توان نوشت:

$$\frac{۰.۰۲۱\times۱۰^{-۲}\,m}{\text{فاصله تکیه‌گاه از سطح زمین}} = \frac{۰.۰۸۵\times۱۰^{-۲}\,m}{۶.۴\times۱۰^{۶}\,m}$$

از حل معادلهٔ بالا به دست می‌آید:

$$\text{فاصله تکیه‌گاه از سطح زمین} = ۱.۶\times۱۰^{۶}\,m \qquad (۱۷)$$

رابطه شماره ۱۷ نشان می‌دهد تکیه‌گاهی که مرکز جرم‌های زمین و ماه به دور آن می‌گردند نقطه‌ای داخل زمین و به فاصله ۱۶۰۰ کیلومتر از سطح کرهٔ زمین است.

بر این اساس فاصله مرکز زمین (نه مرکز جرم زمین) از تکیه‌گاه به‌دست می‌آید که برابر است با:

$$d_۱ = ۶.۴\times۱۰^{۶} - ۱.۶\times۱۰^{۶} = ۴.۸\times۱۰^{۶}\,m$$

مقایسهٔ رابطه‌های شماره ۱۱ و ۱۲ نشان می‌دهد:

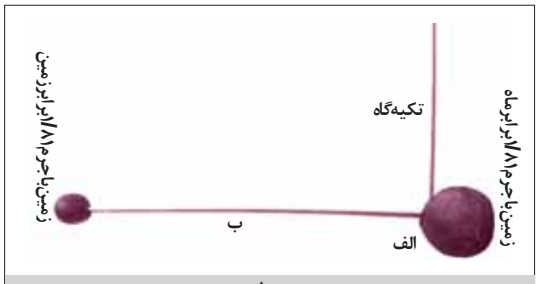
$$\text{فاصلهٔ تکیه‌گاه از سطح توپ} = ۸.۵cm - ۶.۲cm = ۲.۳cm$$

و مقایسه آن با رابطهٔ شماره ۱۶ اختلاف کوچکی در چند ۲ میلی‌متر را نشان می‌دهد:

$$\text{اختلاف اندازه‌ها} = ۲.۳cm - ۲.۱cm = ۰.۲cm$$

نکتهٔ حائز اهمیت آن است که ما بدون حل رابطه شماره ۸ و به کمک مدل‌سازی توانستیم بخشی از جرم زمین که در سمت چپ تکیه‌گاه قرار می‌گیرد را در اندازه‌گیری‌ها وارد کنیم و همین موضوع باعث شد تا فاصلهٔ تکیه‌گاه از سطح توپ (مدل زمین) کمتر شود و به عدد درست‌تری برسیم.

می‌توان همانند آنچه در مورد آزمایش‌های مراحل ۱ و ۲ انجام شد با مشخص شدن محل تکیه‌گاه روی مدل زمین، مجموعه را از محل تکیه‌گاه آویزان کرد تا وضعیت تعادلی خود را با نسبت‌های تعیین شده همچنان حفظ کند. شکل شماره ۹ چنین وضعیتی را نمایش می‌دهد.



▲شکل ۹. در این شکل ماه با جرم $\frac{۱}{۸۱}$ جرم زمین در سمت چپ قرار گرفته و زمین با جرم ۸۱ برابر جرم ماه در سمت راست قرار دارد و برای برقراری تعادل تکیه‌گاه تا جایی پیش‌رفته که تعادل برقرار شود.

همان‌طور که در شکل شماره ۹ دیده می‌شود و طبق محاسبه‌ها، تکیه‌گاه تقریباً در فاصله ۱۶۰۰ کیلومتری در زیر سطح زمین قرار می‌گیرد. با این حساب طول بازوی الف تقریباً ٤٨٠٠ کیلومتر و طول بازوی ب نیز تقریباً ۳۸٤۰۰ کیلومتر است. (با توجه به اینکه حرکت ماه به دور زمین بیضی شکل است، اعداد نوشته شده ثابت نیستند و در این محاسبات برای طول بازوی ب مقدار میانگین فاصلهٔ زمین از ماه درنظر گرفته شده است.) نکته حائز اهمیت دیگر آن است که برای اتصال مدل زمین و ماه به یکدیگر در شکل ۷ از یک نوع میله چوبی با جرم بسیار کم (حدود ۲۰ گرم) استفاده شده است که تأثیر جرمی آن در گشتاور ایجاد شده توسط آن با ۱۰ گرم کمتر گرفتن جرم مدل ماه در زمان ساخت به شکل قابل ملاحظه‌ای جبران شده است. (زیرا میله چوبی، همگن و مرکز جرم آن منطبق بر وسط میله است و بدین ترتیب

گشتاور ایجاد شده توسط چنین جرمی در انتهای میله برابر گشتاور ایجاد شده توسط دو برابر آن جرم از وسط میله همگن است.) [همان]

هرچند در مورد اخیر و مواردی نظیر آن نسبت جرم زمین به ماه که برابر ۸۱ فرض شده است و همچنین فرض اولیهٔ:

$$d_1 = \frac{D}{۸۲} = \frac{۳۸۴\times۱۰^۶ m}{۸۲} = ۴.۷\times۱۰^۶ m$$

که مبنای محاسبات بعدی قرار گرفته است، همچنین فرض چگالی یکنواخت زمین، دقت پایین اندازه‌گیری طول‌ها (که در حدود میلی‌متر است)، خم شدن میله چوبی اتصالی کره‌ها و سرخوردن توپ روی تیغه چوبی در زمان تعیین مرکز جرم و موارد متعدد دیگر می‌تواند جزء خطاهای جدی باشد؛ اما تأکید نویسندگان مقاله بیشتر بر ارائهٔ روشی ابتکاری برای حل این‌گونه مسائل است که ضمناً برای عامه قابل فهم نیز باشد.

نتیجه‌گیری

وقتی دو قطعه سنگی را که با یک تکه نخ به هم متصل شده‌اند به سرعت در هوا پرتاب می‌کنیم، چرخش آن‌ها در هوا به‌گونه‌ای است که هرکدام اطراف مرکز جرم مشترکشان می‌گردند. ما سعی کردیم با مبنا قرار دادن این موضوع، مدلی برای چرخش زمین و ماه به دور مرکز جرم‌شان شبیه‌سازی کنیم و با منطبق کردن بر واقعیت‌ها، نتایج موردنظر را به دست آوریم. از این رو با انجام آزمایش‌هایی نتیجه گرفتیم:

۱. در صورتی که مدل طراحی شده، جرم زمین و ماه برابر فرض شوند، تکیه‌گاهی که در زمین و ماه به دور آن خواهند چرخید (این تکیه‌گاه در واقع همان مرکز جرم مشترک آن‌هاست.) درست در نقطه‌ای وسط خط واصل مراکز آن‌ها خواهد بود.

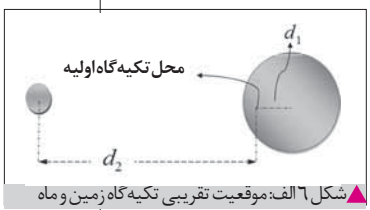
۲. در صورتی‌که در مدل طراحی شده، جرم زمین دو برابر جرم ماه فرض شود، تکیه‌گاه به اندازهٔ $\frac{۱}{۶}$ فاصلهٔ بین زمین و ماه نسبت به حالت قبل، به سمت زمین نزدیک‌تر می‌شود و فاصلهٔ ماه از تکیه‌گاه دو برابر فاصلهٔ زمین از تکیه‌گاه خواهد شد.

۳. در صورتی‌که در مدل طراحی شده، جرم زمین به نسبت واقعی آن یعنی ۸۱ برابر جرم ماه فرض شود، باز هم زمین و ماه، حول نقطهٔ ثقل یا مرکز جرم مشترکشان خواهند چرخید. اما مشکلی که در این حالت ایجاد می‌شود آن است که چون جرم و شعاع زمین به نسبت قابل ملاحظه‌ای از جرم و شعاع ماه بزرگ‌تر است، مرکز جرم مشترک زمین و ماه در نقطه‌ای درون زمین قرار می‌گیرد و در نتیجه بخشی از جرم زمین که حول تکیه‌گاه می‌چرخد در سمت ماه قرار خواهد گرفت، که محاسبه موقعیت تکیه‌گاه را در این وضعیت مشکل می‌کند. اما می‌توان با طراحی مدلی، الگوی زمین و ماه را در ابعاد آزمایشگاهی ایجاد و با انطباق آن بر ابعاد طبیعی زمین و ماه، موقعیت تقریبی تکیه‌گاه را به‌دست آورد.

بدین منظور ابتدا یک توپ پلاستیکی به‌عنوان مدل زمین انتخاب و درون آن از شن و ماسه پر گردید و جرم آن دقیقاً اندازه گیری شد. $m'_1 = ۳.۷۰۰ Kg$

در ادامه به منظور تعیین موقعیت تقریبی تکیه‌گاه روی توپ (مدل زمین)، محل تکیه‌گاه اولیه زمین و ماه با توجه به رابطه ۵ تعیین گردید:

$$d_2 = ۸۱ d_1 \quad (۵)$$



شکل شماره ۶ الف

▲شکل ٦ الف: موقعیت تقریبی تکیه‌گاه زمین و ماه

و با انطباق بر مدل زمین و ماه، موقعیت تقریبی تکیه‌گاه، با توجه به شعاع توپ $(R'_1 = ۸.۵\times۱۰^{-۲} m)$ به‌دست آمد.

$$d'_1 = ۶.۲\times۱۰^{-۲} m$$

و برای سهولت طراحی مدل آزمایشی، جرم مدل ماه (m'_2) معادل $\frac{۸}{۸۱}$ جرم زمین و فاصله مدل ماه از تکیه‌گاه (d'_2) نیز برابر $\frac{۸۱}{۸}$ فاصله مدل زمین از تکیه‌گاه (d'_1) انتخاب شد تا با توجه به رابطهٔ شماره ۱۳:

$$m'_1\times d'_1 = ۸m'_2\times\frac{d'_2}{۸} \quad (۱۳)$$

معادلهٔ اهرم‌ها همچنان برقرار باشد:

$$m'_1\times d'_1 = m'_2\times d'_2 \quad (۱)$$

و مقادیر جرم مدل ماه برابر:

$$۸m'_2 = ۰.۳۶۴ Kg \quad (۱۵)$$

و فاصلهٔ مدل ماه از تکیه‌گاه برابر:

$$d'_2 = ۶۳ cm \quad (۱٤)$$

به‌دست آمد و با مشخص شدن جرم ماه و فاصله‌اش از تکیه‌گاه، مدل ساخته شد و به کمک یک گوهٔ چوبی (تکیه‌گاه) که در محل موقعیت تقریبی تکیه‌گاه در زیرزمین قرار گرفت، موقعیت دقیق‌تر تکیه‌گاه با جابه‌جایی تکیه‌گاه تعیین شد و طبق اندازه‌گیری مقدار فاصلهٔ تکیه‌گاه از مرکز مدل زمین (با توجه به شکل شماره ۸) به‌دست آمد:

$$d'_1 = OP - PH = ۸.۵cm - ۲.۱cm = ۶.۴cm$$

با انطباق مجدد آن بر ابعاد واقعی زمین و ماه و فاصله‌های آن‌ها، فاصله مرکز جرم زمین و ماه (تکیه‌گاه) تعیین شد که برابر شد با:

$$d_1 = ۴.۸\times۱۰^۶ m$$

رابطه بالا بدان معناست که زمین و ماه به دور مرکز جرم مشترکشان که در نقطه‌ای داخل زمین و به فاصله ٤۸۰۰ کیلومتر از مرکز زمین و ۱٦۰۰ کیلومتر از سطح زمین واقع است، می‌چرخد که با آنچه از محاسبات نجومی به‌دست می‌آید سازگاری دارد.

منابع

[۱] زمردیان؛ حسین، حاجبی؛ بهروز، ترجمه، **مبانی نجوم**، انتشارات دانشگاه تهران

[2] *Halliday; David, Resnick; Robert,* ***Fundamentals of Physics****, John Weily & Sons Inc., Vol. 1, (1981), 169-217*

[3] *Jones; Edvin, childers; Richard,* ***contemporary college physics****, McGraw-Hill Companies Inc., (1999). 263-306*

[٤] نیرومند راد؛ اعظم، همدانی؛ غلامحسین، ترجمه، **مکانیک؛ کیت ر. سایمون**، نشر دانشگاه صنعتی شریف، (۱۳۷۳)، ۲۱٤-۱٦٤